Dr. Christian Scheunert, Dr. Christian Scheunert 13.12.2018

4. Exercise on Convex Optimization

Problem 12: (Dualität)

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & x^2 + 1 \\ \text{s.t.} \quad & (x-2)(x-4) \leq 0. \end{aligned}$$

a) Gegeben Sie die Menge gültiger Punkte, den optimalen Punkt x^* und den optimalen Wert p^* an.

b) Stellen Sie die Zielfunktion über x grafisch dar. Zeichnen Sie in die gleiche Grafik die Menge der gültigen Punkte, den optimalen Punkt, den optimalen Wert sowie die Lagrange Funktion $L(x, \lambda)$ für $\lambda \in \{1, 2, 3\}$ ein. Verifizieren Sie die Eigenschaft $p^* \geq \inf_x L(x, \lambda)$ für $\lambda \geq 0$. Bestimmen Sie die duale Lagrange Funktion und stellen sie diese in einer weiteren Abbildung grafisch dar.

c) Geben Sie das duale Problem an und verifizieren Sie, daß es sich dabei um ein konkaves Maximierungsproblem handelt. Bestimmen Sie den optimalen Punkt λ^* und den optimalen Wert d^* des dualen Problems. Liegt starke Dualität vor?

Problem 13: (Minimierungsproblem)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit und $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c \neq 0$. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c'x \\ \text{s.t.} \quad & x'Ax \leq 1. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß dieses Optimierungsproblem konvex ist.

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem mit Hilfe der Substitution $y = A^{1/2}x$.

Problem 14: (Entropy Maximization Problem)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$. Consider the entropy maximization problem

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & \mathbf{1}'x = 1, \end{aligned} \tag{0.1}$$

where $\operatorname{dom} f_0 = \mathbb{R}^n_{++}$. Find the conjugate function f_0^* of f_0 and the dual function g of the primal problem (0.1). Moreover, derive the dual problem of (0.1), check if it suffices Slater's condition, and convert it to a geometric program.

Problem 15: (Water-Filling Problem)

Let $a_1, \dots, a_n > 0$. Consider the water-filling problem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i + x_i) \\ \text{subject to} & x \geq 0 \\ & \mathbf{1}'x = 1. \end{array}$$

Show that the KKT conditions for this problem can be solved. Further, solve the water-filling problem and illustrate the solution.